

# NUMERIČNO REŠEVANJE HIPERBOLIČNEGA KVADRATNEGA PROBLEMA LASTNIH VREDNOSTI

Bor Plestenjak

20. februar 2007

## Povzetek

Predstavljen je kvadratni problem lastnih vrednosti. Opisana je numerična metoda za reševanje tridiagonalnega hiperboličnega kvadratnega problema lastnih vrednosti. Metoda uporablja inercijo, Laguerrovo metodo in strategijo deli-in-vladaj.

## 1 Uvod

Dan je kvadratni matrični polinom

$$Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K,$$

kjer so  $M$ ,  $C$  in  $K$  realne  $n \times n$  matrike. Pri *kvadratnem problemu lastnih vrednosti* iščemo tak skalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  in tak neničelni vektor  $x \in \mathbb{C}^n$ , da je

$$Q(\lambda)x = 0. \tag{1}$$

V tem primeru je  $\lambda$  *lastna vrednost*,  $x$  pa *desni lastni vektor*. Neničelni vektor  $y \in \mathbb{C}^n$ , pri katerem je  $y^*Q(\lambda) = 0$ , je *levi lastni vektor*. V nadaljevanju bomo kvadratni problem lastnih vrednosti (1) označevali kar s  $Q$ .

Pravimo, da je kvadratni problem lastnih vrednosti  $Q$  *regularen*, če karakteristični polinom

$$p(\lambda) = \det Q(\lambda)$$

ni identično enak nič. Stopnja karakterističnega polinoma je kvečjemu  $2n$ . Njegove ničle so končne lastne vrednosti  $Q$ , ki jih v primeru, ko je stopnja polinoma  $p$  manjša od  $2n$ , po dogovoru dopolnimo z neskončnimi lastnimi

vrednostmi. Neskončne lastne vrednosti  $Q$  ustrezajo ničelnim lastnim vrednostim kvadratnega problema lastnih vrednosti  $\lambda^2 Q(1/\lambda) = \lambda^2 K + \lambda C + M$ . Opazimo lahko, da se neskončne lastne vrednosti pojavijo le v primeru, ko je matrika  $M$  singularna.

Regularni kvadratni problem lastnih vrednosti ima tako  $2n$  lastnih vrednosti (končnih ali neskončnih). Vsaki lastni vrednosti pripada vsaj en levi in vsaj en desni normiran lastni vektor. Za razliko od standardnega problema lastnih vrednosti  $Ax = \lambda x$  in posplošenega problema lastnih vrednosti  $Ax = \lambda Bx$  lastni vektorji praviloma niso linearno neodvisni, saj več kot  $n$  vektorjev pač ne more biti linearno neodvisnih.

Tako kot pri standardnem problemu lastnih vrednosti je tudi tu *algebrajska večkratnost* lastne vrednosti enaka večkratnosti ničle karakterističnega polinoma, *geometrijska večkratnost* pa je enaka številu linearno neodvisnih lastnih vektorjev. Če ima algebrajska večkratnost ena, je lastna vrednost *enostavna*, če pa je algebrajska večkratnost enaka geometrijski, je lastna vrednost *polenostavna*.

Da so zadeve lahko dosti drugačne kot pri standardnem in posplošenem problemu lastnih vrednosti, kaže naslednji zgled, povzet iz [9].

Če vzamemo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

potem je  $\det Q(\lambda) = -6\lambda^5 + 11\lambda^4 - 12\lambda^3 + 12\lambda^2 - 6\lambda + 1$  in problem je regularen. Lastni pari so

$k$	1	2	3	4	5	6
$\lambda_k$	$1/3$	$1/2$	1	$i$	$-i$	$\infty$
$x_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Pet lastnih vrednosti je končnih, ena pa neskončna. Opazimo, da imata različni lastni vrednosti lahko isti lastni vektor, kar pri standardnem in posplošenem lastnem problemu seveda ni možno.

Standardni postopek za numerično reševanje kvadratnega problema lastnih vrednosti je *linearizacija*, kjer problem prevedemo na posplošeni problem lastnih vrednosti reda  $2n$ . Možnih linearizacij je več, za zgled pa vzemimo

$$\begin{bmatrix} 0 & N \\ -K & -C \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad (2)$$

kjer je  $N$  poljubna nesingularna matrika. Hitro lahko preverimo, da je  $\lambda, x$  lastni par kvadratnega problema lastnih vrednosti (1) natanko tedaj, ko je  $\lambda, [x^T \quad \lambda x^T]^T$  lastni par za (2).

Če vzamemo  $N = I$  in je  $M$  nesingularna, potem lahko (2) prevedemo na reševanje standardnega lastnega problema za matriko

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}. \quad (3)$$

S tem, ko se znebimo posplošenega problema lastnih vrednosti, lahko izgubimo kakšne uporabne lastnosti problema, kot je npr. simetričnost. Če pri simetričnem kvadratnem problemu lastnih vrednosti, kjer so matrike  $M, C$  in  $K$  simetrične, izberemo  $N = -K$ , potem sta v (2) obe matriki simetrični, pri (3) pa simetrije ni več.

Ceprav imamo za reševanje standardnega in posplošenega problema lastnih vrednosti na voljo obratno stabilne algoritme, nam to še ne zagotavlja stabilnega reševanja kvadratnega problema lastnih vrednosti preko linearizacije. Za stabilnost potrebujemo metodo, ki bi reševala originalni problem brez linearizacije. Primer takšnega algoritma za poseben primer kvadratnega problema lastnih vrednosti bomo predstavili v nadaljevanju.

Več o kvadratnem problemu lastnih vrednosti in o tem, kako ga numerično rešiti, najdemo v obsežni literaturi, omenimo le izvrsten pregledni članek, ki sta ga napisala Tisseur in Meerbergen [9].

## 2 Uporaba

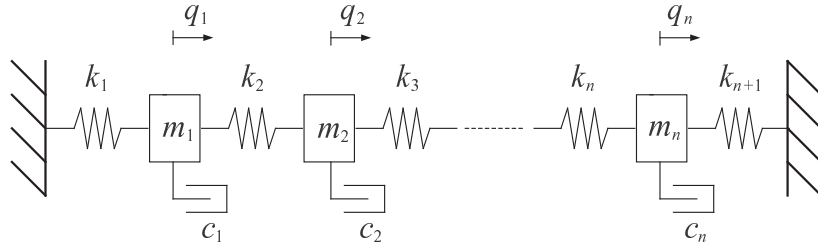
S kvadratnim problemom lastnih vrednosti se srečamo na številnih področjih. Ena izmed najpogostejših uporab je reševanje linearne diferencialne enačbe drugega reda

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t), \quad (4)$$

kjer so  $M, C$  in  $K$  matrike reda  $n$ ,  $q(t)$  in  $f(t)$  pa vektorja dolžine  $n$ . Ta enačba nastopa npr. pri mehanskem nihanju, pri linearnih vezjih v elektrotehnikih, v akustiki in drugje [9].

Za zgled vzemimo nihanje dušenega sistema mas in vzmeti na sliki 1, kjer predpostavimo še, da na  $i$ -to telo deluje sila  $f_i$ . Če predpostavimo  $q_0 = q_{n+1} = 0$ , potem iz Newtonovega zakona dobimo enačbe

$$m_i\ddot{q}_i(t) = -k_i(q_i(t) - q_{i-1}(t)) - k_{i+1}(q_i(t) - q_{i+1}(t)) - c_i\dot{q}_i(t) + f_i(t)$$



Slika 1: Dušen sistem mas in vzmeti. Masa  $i$ -tega telesa je  $m_i$ ,  $k_i$  označuje konstanto  $i$ -te vzmeti,  $c_i$  konstanto  $i$ -tega dušilca,  $q_i$  pa odmik  $i$ -tega telesa od ravnovesne lege.

za  $i = 1, \dots, n$  iz katerih sestavimo (4), kjer je

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & \\ & -k_2 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & -k_n \\ & & & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix}.$$

$M$  je *masna matrika*,  $C$  *matrika dušenja*,  $K$  pa *togostna matrika*. V nadaljevanju bomo pokazali, kako je rešitev diferencialne enačbe (4) povezana z rešitvijo kvadratnega problema lastnih vrednosti (1).

V primeru, ko so vse lastne vrednosti (1) različne, lahko splošno rešitev homogene diferencialne enačbe

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0, \quad (5)$$

ki jo dobimo iz (4) v primeru  $f = 0$ , zapišemo v obliki

$$q(t) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k e^{\lambda_k t} x_k,$$

kjer so  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$  poljubne konstante in  $x_1, \dots, x_{2n}$  ustrezni lastni vektorji. V primeru večkratnih lastnih vrednosti se rešitev zapiše s pomočjo Jordanih trojic, ki jih tu ne bomo obravnavali, najdemo pa jih lahko npr. v [9].

Če obstaja kakšna lastna vrednost s pozitivnim realnim delom, potem velja  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|q(t)\| = \infty$  in pravimo, da je homogena enačba (5) *nestabilna*. Če za lastne vrednosti velja  $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$  za  $k = 1, \dots, 2n$ , potem je homogena enačba *stabilna* in velja  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|q(t)\| = 0$ . Poznamo tudi *šibko stabilnost*, kjer zahtevamo, da velja  $\operatorname{Re}(\lambda_k) \leq 0$  za  $k = 1, \dots, 2n$ , vse lastne vrednosti, za katere je  $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ , pa so polenostavne. V primeru šibke stabilnosti ostane rešitev homogene enačbe po normi omejena, ko gre  $t$  proti  $\infty$ .

Splošna rešitev diferencialne enačbe (4) je enaka vsoti splošne rešitve homogene enačbe (5) in partikularne rešitve. Denimo, da je  $f(t) = e^{i\omega_0 t} f_0$ , kar npr. v primeru mehanskega nihanja na sliki 1 pomeni, da gre za vsiljeno nihanje s frekvenco  $\omega_0$ . Če so vse lastne vrednosti različne in se  $i\omega_0$  razlikuje od vseh lastnih vrednosti, potem je partikularna rešitev  $p(t)$  diferencialne enačbe (4) podana z

$$p(t) = e^{i\omega_0 t} \sum_{k=1}^{2n} \frac{y_k^* f_0}{i\omega_0 - \lambda_k} x_k, \quad (6)$$

kjer so  $y_1, \dots, y_{2n}$  ustrezni levi lastni vektorji. Če se vsiljena frekvenca približa eni izmed lastnih frekvenc, lahko člen  $\frac{y_k^* f_0}{i\omega_0 - \lambda_k}$  postane poljubno velik, če je le  $y_k^* f_0 \neq 0$ . V tem primeru pravimo, da se pojavi *rezonanca*.

V primeru splošne funkcije  $f$  oziroma v primeru večkratnih lastnih vrednosti lahko partikularno rešitev zapišemo v integralni obliki, ki jo najdemo v [4, 9].

### 3 Hiperbolični problem

V nadaljevanju se bomo omejili na poseben razred kvadratnih problemov lastnih vrednosti, kjer so matrike  $M$ ,  $C$  in  $K$  simetrične,  $M$  je pozitivno definitna in za vsak neničelni vektor  $x$  velja

$$(x^T C x)^2 > 4(x^T M x)(x^T K x). \quad (7)$$

To je *hiperbolični* kvadratni problem lastnih vrednosti. Kadar je še dodatno  $K$  pozitivno definitna,  $C$  pa pozitivno semidefinitna matrika, imamo *nadkritično dušeni* kvadratni problem lastnih vrednosti.

Če vzamemo poljubni neničelni vektor  $x$ , potem je  $x^T Q(\lambda)x = 0$  kvadratna enačba za  $\lambda$ , ki ima zaradi (7) dve enostavni realni rešitvi. Označimo ju z

$$\rho_{\pm}(x) = \frac{-c(x) \pm \sqrt{c(x)^2 - 4m(x)k(x)}}{2m(x)}, \quad (8)$$

kjer je  $m(x) = x^T Mx$ ,  $c(x) = x^T Cx$  in  $k(x) = x^T Kx$ . To je posplošitev Rayleighovega kvocienta za kvadratni problem lastnih vrednosti. V primeru, ko je  $x$  lastni vektor, je vsaj ena rešitev kvadratne enačbe (8) lastna vrednost.

Hiperbolični kvadratni problem lastnih vrednosti ima  $2n$  realnih lastnih vrednosti in lastnih vektorjev, vse lastne vrednosti pa so polenostavne. Med  $n$  največjimi (*primarnimi*) lastnimi vrednostmi in  $n$  najmanjšimi (*sekundarnimi*) lastnimi vrednostmi je strog razmik. Primarnim lastnim vrednostim pripada  $n$  linearno neodvisnih lastnih vektorjev in enako velja za sekundarne lastne vrednosti.

Pri nadkritično dušenem problemu so vse lastne vrednosti negativne. V primeru mehanskega nihanja na sliki 1 to pomeni, da se brez vsiljenega nihanja ( $f = 0$ ) telesa izmahnjena iz ravnovesne lege vrnejo nazaj v ravnovesno lego, pri tem pa nobeno telo ne zaniha.

Ker so lastne vrednosti realne, jih lahko uredimo po velikosti, da velja

$$\lambda_{2n} \leq \dots \leq \lambda_{n+1} < \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1.$$

Primarne lastne vrednosti so  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , sekundarne pa  $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n}$ . Za lastne vrednosti hiperboličnega kvadratnega problema velja naslednji izrek o minimaksu, ki je posplošitev znanega Courant-Fischerjevega izreka o minimaksu za simetrične matrike [2].

**Izrek 1 (Duffin [3])** *Za  $i = 1, \dots, n$  velja*

$$\lambda_i = \max_{\substack{S \subset \mathbb{R}^n \\ \dim(S)=i}} \min_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \rho_+(x) = \min_{\substack{R \subset \mathbb{R}^n \\ \dim(R)=n-i+1}} \max_{\substack{x \in R \\ x \neq 0}} \rho_+(x),$$

$$\lambda_{n+i} = \max_{\substack{S \subset \mathbb{R}^n \\ \dim(S)=i}} \min_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \rho_-(x) = \min_{\substack{R \subset \mathbb{R}^n \\ \dim(R)=n-i+1}} \max_{\substack{x \in R \\ x \neq 0}} \rho_-(x).$$

Pomembno lastnost hiperboličnega problema, ki nam bo prav prišla v nadaljevanju, opisuje naslednji izrek.

**Izrek 2 (Markus [7])** *Simetrični kvadratni problem lastnih vrednosti  $Q$  je hiperboličen natanko tedaj, ko obstaja tako realno število  $\gamma$ , da je  $Q(\gamma)$  negativno definitna matrika.*

Za  $\gamma$  iz izreka 2 očitno velja  $\max_{x \neq 0} \rho_-(x) < \gamma < \min_{x \neq 0} \rho_+(x)$  oziroma  $\lambda_{n+1} < \gamma < \lambda_n$ .

## 4 Inercija

Denimo, da imamo tridiagonalni hiperbolični kvadratni problem lastnih vrednosti, kar pomeni, da so matrice  $M$ ,  $C$  in  $K$  tridiagonalne. Zgled za tovrstni problem je npr. mehansko nihanje iz drugega razdelka.

Za simetrično matriko  $A$  je *inercija* trojica  $(\nu(A), \zeta(A), \pi(A))$ , kjer je  $\nu(A)$  število negativnih lastnih vrednosti,  $\zeta(A)$  število lastnih vrednosti, ki so enake 0,  $\pi(A)$  pa število pozitivnih lastnih vrednosti matrice  $A$ . Če je  $A$  tridiagonalna matrika, potem za izračun inercije obstaja stabilen in učinkovit algoritem, ki temelji na  $LDL^T$  razcepju in Sylvestrovem izreku o inerciji, najdemo ga npr. v [2]. Ko imamo učinkovit način za izračun inercije, lahko za izračun lastnih vrednosti uporabimo bisekcijo.

Podoben postopek lahko razvijemo za tridiagonalni hiperbolični kvadratni problem lastnih vrednosti. Uporabili bomo izrek 2 o obstoju takega  $\gamma$ , da je  $Q(\gamma)$  negativno definitna matrika, in pokazali povezavo med inercijo  $Q(\lambda)$  in številom lastnih vrednosti kvadratnega problema lastnih vrednosti  $Q$ , ki so večje oziroma manjše od  $\lambda$ .

**Izrek 3** *Naj bo  $Q$  hiperbolični kvadratni problem lastnih vrednosti in naj bo  $\det Q(\lambda_0) \neq 0$ .*

1. Če je  $\lambda_0 \leq \gamma$ , potem je število negativnih lastnih vrednosti matrice  $Q(\lambda_0)$  enako številu lastnih vrednosti  $Q$ , ki so manjše od  $\lambda_0$ .
2. Če je  $\lambda_0 \geq \gamma$ , potem je število negativnih lastnih vrednosti matrice  $Q(\lambda_0)$  enako številu lastnih vrednosti  $Q$ , ki so večje od  $\lambda_0$ .

*Dokaz.* Pri vsakem  $\lambda \in \mathbb{R}$  je  $Q(\lambda)$  simetrična matrika z  $n$  realnimi lastnimi vrednosti

$$\mu_n(\lambda) \leq \mu_{n-1}(\lambda) \leq \dots \leq \mu_1(\lambda), \quad (9)$$

pri čemer je  $\mu_i$  zvezna funkcija  $\lambda$  za  $i = 1, \dots, n$ . Zaradi (9) se krivulje  $\mu_i$  lahko le dotikajo, ne morejo pa se prepletati.

Očitno je  $\lambda_1$   $s$ -kratna lastna vrednost (1) natanko tedaj, ko ima  $Q(\lambda_1)$   $s$ -kratno lastno vrednost 0 oziroma  $\mu_i(\lambda_1) = \dots = \mu_{i+s-1}(\lambda_1) = 0$  pri nekem  $i$ . Ker je  $Q(\gamma)$  negativno definitna matrika, pri  $\lambda = \gamma$  za vse  $i$  velja  $\mu_i(\lambda) < 0$ , ko pa gre  $\lambda$  proti  $\infty$  ali  $-\infty$ , postanejo vse lastne vrednosti  $Q(\lambda)$  strogo pozitivne, saj je

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\lambda^2} Q(\lambda) = M,$$

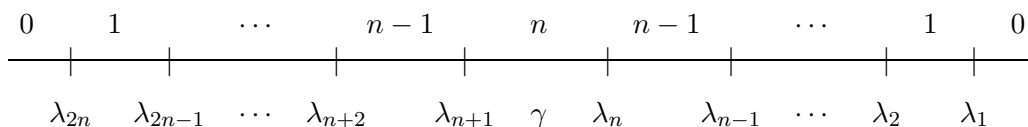
matrika  $M$  pa je pozitivno definitna.

Zaradi tega vsaka krivulja  $\mu_i$  vsaj dvakrat seka  $x$ -os, enkrat levo in enkrat desno od  $\gamma$ . Ker je krivulj  $n$ , lastnih vrednosti kvadratnega problema  $Q$  pa  $2n$ , sledi, da vsaka krivulja  $\mu_i$  natanko dvakrat zavzame vrednost 0.

Ko gre  $\lambda$  od  $-\infty$  do  $\gamma$ , je število lastnih vrednosti kvadratnega problema lastnih vrednosti  $Q$ , ki so manjše od  $\lambda$ , enako številu negativnih lastnih vrednosti  $Q(\lambda)$ . Podobno na intervalu med  $\gamma$  in  $\infty$  velja, da je število lastnih vrednosti kvadratnega problema lastnih vrednosti  $Q$ , ki so večje od  $\lambda$ , enako številu negativnih lastnih vrednosti  $Q(\lambda)$ . ■

**Opomba 1** Izrek 3 je posplošitev izreka, ki ga je Sapagovene [8] izpeljal za poseben primer hiperboličnega problema, kjer je  $M$  pozitivno,  $K$  pa negativno definitna matrika.

Slika 2 prikazuje, kako je število negativnih lastnih vrednosti matrike  $Q(\lambda)$  odvisno od  $\lambda$ . Pri lastnih vrednostih  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$  kvadratnega problema lastnih vrednosti  $Q$  pride do preskoka števila negativnih lastnih vrednosti  $Q(\lambda)$  in to lahko uporabimo za preprost algoritem, ki s pomočjo bisekcije izračuna izbrano lastno vrednost.



Slika 2: Pri lastnih vrednostih kvadratnega problema lastnih vrednosti  $Q$  pride do preskoka števila negativnih lastnih vrednosti matrike  $Q(\lambda)$ .

Označimo z  $\nu(\lambda_0)$  število negativnih lastnih vrednosti  $Q(\lambda_0)$ . Denimo, da iščemo primarno lastno vrednost in da imamo začetni interval  $[a, b] \subset (\gamma, \infty)$ , za katerega velja  $\nu(a) \geq k$  in  $\nu(b) < k$ . Potem lahko z naslednjim algoritmom izračunamo  $\lambda_k$ .

Algoritem lahko enostavno popravimo tako, da je uporaben tudi za sekundarne lastne vrednosti. Seveda lahko algoritem uporabimo tudi v primeru, ko matrike  $M$ ,  $C$  in  $K$  niso tridiagonalne, le časovna zahtevnost računanja je v tem primeru večja.

## 5 Laguerrova metoda

Bisekcija je sicer zelo robustna metoda, ki nas vedno pripelje do rešitve, a konvergira zelo počasi. V primeru, ko nas zanimajo vse lastne vrednosti, zato



---

**Algoritem 1** Iz danih  $n \times n$  simetričnih tridiagonalnih matrik  $M$ ,  $C$  in  $K$  in začetnega intervala  $[a, b]$  izračuna lastno vrednost  $\lambda_k$  tridiagonalnega hiperboličnega problema lastnih vrednosti.

---

**dokler**  $|b - a| > \epsilon$

$$c = (a + b)/2$$

**če**  $\nu(c) \geq k$

$$a = c$$

**sicer**

$$b = c$$

**konec če**

**konec dokler**

---

raje uporabimo Laguerrovo metodo. Laguerrova iteracija za  $p(\lambda) = \det Q(\lambda)$  se glasi

$$L_{\pm}(x) = x + \frac{2n}{\left( \frac{-p'(x)}{p(x)} \pm \sqrt{(2n-1) \left( (2n-1) \left( \frac{-p'(x)}{p(x)} \right)^2 - 2n \frac{p''(x)}{p(x)} \right)} \right)}. \quad (10)$$

Iz začetnega približka  $x$  dobimo dva približka, ki ju označimo z  $L_-(x)$  in  $L_+(x)$ . Če si predstavljamo, da sta v neskončnosti pozitivni in negativni krak realne osi povezana, potem za  $x \neq \lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, 2n$ , velja, da  $L_-(x)$  leži med  $x$  in najbližjo manjšo lastno vrednostjo,  $L_+(x)$  pa med  $x$  in najbližjo večjo lastno vrednostjo. Za  $x \in (\lambda_{i+1}, \lambda_i)$  tako velja

$$\lambda_{i+1} < L_-(x) < x < L_+(x) < \lambda_i.$$

Laguerrova metoda ima naslednje lepe lastnosti, ki jih najdemo npr. v [1, 10]:

- Konvergenca v bližini enostavne ničle je kubična, v bližini večkratne ničle pa linearna.
- Če ima polinom same realne ničle, potem imamo globalno konvergenco, kar pomeni, da za vsak začetni približek  $x_0$  zaporedje  $x_{r+1} = L_+(x_r)$  monotono konvergira proti najmanjši ničli polinoma, ki je večja ali enaka  $x_0$ . Podobno zaporedje  $x_{r+1} = L_-(x_r)$  monotono konvergira proti največji ničli polinoma, ki je manjša ali enaka  $x_0$ . Tu si spet predstavljamo, da sta v neskončnosti pozitivni in negativni krak realne osi povezana.

Za Laguerrovo metodo potrebujemo ekonomičen in stabilen izračun vrednosti  $p(\lambda)$ ,  $p'(\lambda)$  in  $p''(\lambda)$ , kjer je  $p(\lambda) = \det Q(\lambda)$ . Naj bo

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

kjer je  $a_i = a_i(\lambda)$  in  $b_i = b_i(\lambda)$ . Naj bo  $p_k(\lambda)$  determinanta vodilne  $k \times k$  podmatrike  $Q(\lambda)$  za  $k = 1, \dots, n$ . Ker je matrika  $Q(\lambda)$  tridiagonalna, lahko hitro izpeljemo naslednje tričlenske rekurzivne formule, kjer smo zaradi preglednosti povsod opustili argument  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \quad p_1 = a_1, \\ p_{r+1} &= a_{r+1}p_r - b_r^2 p_{r-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p'_0 &= 0, \quad p'_1 = a'_1, \\ p'_{r+1} &= a'_{r+1}p_r + a_{r+1}p'_r - 2b_r b'_r p_{r-1} - b_r^2 p'_{r-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p''_0 &= 0, \quad p''_1 = a''_1, \\ p''_{r+1} &= a''_{r+1}p_r + 2a'_{r+1}p'_r + a_{r+1}p''_r - 2(b'_r)^2 p_{r-1} - 2b_r b''_r p_{r-1} - 4b_r b'_r p'_{r-1} - b_r^2 p''_{r-1}. \end{aligned}$$

Pri računanju vrednosti funkcij  $p$ ,  $p'$  in  $p''$  po zgornjih formulah lahko pride do težav s prekoračitvijo ali podkoračitvijo obsega [6], zato je pravilna pot izpeljava rekurzivnih formul za  $p'/p$  in  $p''/p$ , to pa sta ravno količini, ki ju potrebujemo v formuli (10). Podrobnosti bomo izpustili, izpeljava pa poteka podobno kot v [6].

## 6 Deli-in-vladaj

Sedaj bomo poskrbeli še za dobre začetne približke. Do njih pridemo rekurzivno z uporabo principa deli-in-vladaj. Problem razdelimo na dva manjša kvadratna problema lastnih vrednosti, potem pa združene lastne vrednosti obeh manjših problemov uporabimo kot začetne približke za lastne vrednosti originalnega problema. Algoritem, ki ga bomo predstavili v tem razdelku, je posplošitev algoritma za simetrični tridiagonalni problem lastnih vrednosti, ki sta ga razvila Li in Zeng [6].

Izberemo  $m \approx n/2$  in postavimo  $b_m$  na 0. Dobimo

$$Q_0(\lambda) = \begin{bmatrix} Q_1(\lambda) & 0 \\ 0 & Q_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Matriki  $Q_0(\lambda)$  in  $Q(\lambda)$  se malo razlikujeta, saj smo spremenili le dva elementa, zato pričakujemo, da se tudi lastne vrednosti kvadratnih problemov lastnih vrednosti  $Q_0$  in  $Q$  malo razlikujejo.

$Q_1$  in  $Q_2$  sta manjša hiperbolična kvadratna problema lastnih vrednosti, lastne vrednosti  $Q_0$  pa so unija lastnih vrednosti  $Q_1$  in  $Q_2$ . Označimo urejene lastne vrednosti  $Q_0$  z  $\tilde{\lambda}_{2n} \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_1$ . To bodo naši začetni približki za lastne vrednosti  $Q$ .

Definirajmo kvadratni problem lastnih vrednosti  $Q(t)$  z matriko

$$Q(t, \lambda) = tQ(\lambda) + (1 - t)Q_0(\lambda).$$

Če so lastne vrednosti  $Q(t)$  realne za  $t \in [0, 1]$ , potem lahko pokažemo, da se lastne vrednosti  $Q_0$  in  $Q$  prepletajo. Podoben izrek sta Li in Li [5, trditev 2.1] pokazala za simetrični tridiagonalni problem lastnih vrednosti.

**Izrek 4** *Označimo lastne vrednosti kvadratnega problema lastnih vrednosti  $Q(t)$  z  $\lambda_{2n}(t) \leq \dots \leq \lambda_1(t)$ . Za vsako lastno krivuljo  $\lambda_i(t)$  velja, da je na intervalu  $[0, 1]$  ali strogo monotona ali pa enaka konstanti.*

*Dokaz.* Iz konstrukcije  $Q_0$  in iz rekurzivne formule za determinanto tridiagonalne simetrične matrike iz prejšnjega razdelka je razvidno, da lahko determinanto  $Q(t, \lambda)$  zapišemo v obliki

$$p(t, \lambda) = \det Q(t, \lambda) = p_1(\lambda) + t^2 p_2(\lambda),$$

kjer sta  $p_1$  in  $p_2$  polinoma stopnje  $2n$ . Če za izbrani  $\lambda_0$  velja  $p_2(\lambda_0) \neq 0$ , potem ima enačba  $p(t, \lambda_0) = 0$  največ eno rešitev na  $[0, 1]$ . Zaradi tega so vse lastne krivulje  $\lambda_i(t)$  monotone na  $[0, 1]$ .

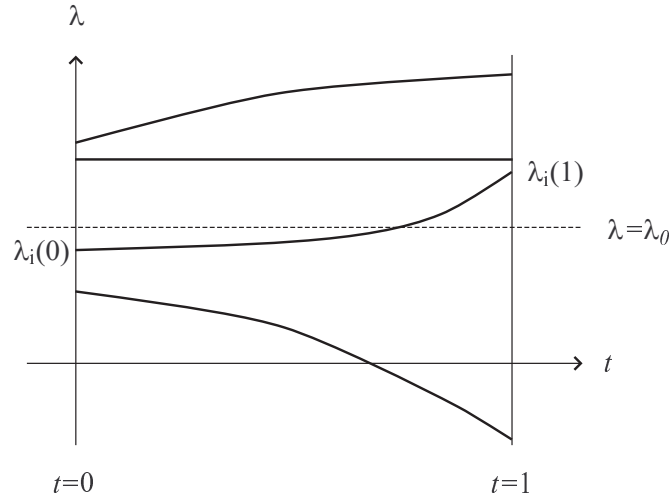
Če je  $p_2(\lambda_0) = 0$ , potem je  $\lambda_0$  lastna vrednost  $Q_0$ . Potem imamo v primeru, ko je tudi  $p_1(\lambda_0) = 0$ , konstantno lastno krivuljo  $\lambda_i(t) = \lambda_0$ . V primeru, ko krivulja  $\lambda_i(t)$  ni konstantna, je zaradi zgornjih ugotovitev strogo monotona. ■

V primeru, ko so vse lastne vrednosti  $Q_0$  paroma različne, se krivulje  $\lambda_i(t)$  tako ne sekajo na  $[0, 1]$ , saj so po eni strani ali konstantne ali pa strogo monotone, po drugi strani pa krivulje na  $(0, 1)$  ne morejo sekati vrednosti  $\lambda_i(0)$  in  $\lambda_i(1)$ . Situacija je prikazana na sliki 3.

Sedaj lahko pokažemo naslednji izrek o prepletanju lastnih vrednosti  $Q_0$  in  $Q$ . Podoben izrek sta za simetrični tridiagonalni problem lastnih vrednosti pokazala Li in Zeng [6, izrek 3.1].

**Izrek 5** *Naj bodo vse lastne vrednosti kvadratnega problema lastnih vrednosti  $Q(t)$  realne za  $t \in [0, 1]$  in naj bodo*

$$\tilde{\lambda}_{2n} \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_1$$



Slika 3: Krivulje  $\lambda_i(t)$  se ne sekajo na  $[0, 1)$ , vsaka krivulja  $\lambda_i(t)$  je ali konstantna ali strogo monotona, navzgor je omejena z  $\lambda_{i-1}(1)$ , navzdol pa z  $\lambda_{i+1}(1)$ .

lastne vrednosti kvadratnega problema lastnih vrednosti  $Q_0$ ,

$$\lambda_{2n} \leq \dots \leq \lambda_1$$

pa lastne vrednosti kvadratnega problema lastnih vrednosti  $Q$ . Potem velja:

- a)  $\lambda_{2n} \leq \tilde{\lambda}_{2n}$  in  $\tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_1$ ,
- b)  $\lambda_{i+1} \leq \tilde{\lambda}_i \leq \lambda_{i-1}$  za  $i = 2, \dots, n-1$  in  $i = n+2, \dots, 2n-1$ ,
- c)  $\tilde{\lambda}_{n+1} \leq \lambda_{n+1} < \lambda_n \leq \tilde{\lambda}_n$ .

*Dokaz.* Matriki  $Q_1(\lambda)$  in  $Q_2(\lambda)$  sta glavni podmatriki  $Q(\lambda)$ , zato so po izreku 1 lastne vrednosti kvadratnih problemov lastnih vrednosti  $Q_1$  in  $Q_2$  vse manjše od  $\lambda_1$  in večje od  $\lambda_{2n}$ . Ker pa so lastne vrednosti  $Q_0$  unija lastnih vrednosti  $Q_1$  in  $Q_2$ , od tod sledi točka a). Na podoben način pokažemo točko c).

Točka b) sledi iz izreka 4, ki pravi, da  $\lambda_i$  in  $\tilde{\lambda}_i$  povezuje monotona lastna krivulja  $\lambda_i(t)$ , zanj pa vemo, da je navzgor in navzdol omejena z  $\lambda_{i-1}$  oziroma  $\lambda_{i+1}$ . ■

Ker velja  $\lambda_{i+1} \leq \tilde{\lambda}_i \leq \lambda_{i-1}$  lahko vedno vzamemo  $\tilde{\lambda}_i$  kot začetni približek za  $\lambda_i$ . Iz vrednosti  $\nu(Q(\tilde{\lambda}_i))$  lahko razberemo ali je  $\lambda_i \geq \tilde{\lambda}_i$  ali  $\tilde{\lambda}_i \geq \lambda_i$  in se

potem odločimo za uporabo zaporedja  $L_+$  ali  $L_-$ . Laguerrova metoda potem monotonno skonvergira proti lastni vrednosti  $\lambda_i$ .

V grobem lahko postopek za računanje lastnih vrednosti tridiagonalnega hiperboličnega kvadratnega problema lastnih vrednosti z Laguerrovo metodo strnemo v naslednjem algoritmu.

---

**Algoritem 2** Iz danih simetričnih tridiagonalnih matrik  $M$ ,  $C$  in  $K$  reda  $n$  izračuna lastne vrednosti  $\lambda_{2n} \leq \dots \leq \lambda_1$  tridiagonalnega hiperboličnega kvadratnega problema lastnih vrednosti  $Q$ .

---

**Korak 1.** Če je  $n = 1$ , reši kvadratno enačbo  $\lambda^2 M + \lambda C + K = 0$  in končaj.

**Korak 2.** Sicer, naj bo  $m = \lfloor n/2 \rfloor$ . Naj bodo  $M_1, C_1$  in  $K_1$  vodilne  $m \times m$ ,  $M_2, C_2$  in  $K_2$  pa zadnje  $(n - m) \times (n - m)$  podmatrike  $M, C$  in  $K$ .

**Korak 3.** Poišči lastne vrednosti tridiagonalnega hiperboličnega kvadratnega problema lastnih vrednosti  $\lambda^2 M_i + \lambda C_i + K_i$  za  $i = 1, 2$ .

**Korak 4.** Združi rešitve iz koraka 3 in jih uredi v  $\tilde{\lambda}_{2n} \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_1$ .

**Korak 5.** Lastne vrednosti iz koraka 4 uporabi kot začetne približke za Laguerrovo metodo:

za  $i = 1, \dots, 2n$   
 $x_0 = \tilde{\lambda}_i, k = 0$   
**ponavlja**  
 če ( $i \leq n$  in  $\nu(\tilde{\lambda}_i) \geq i$ ) ali ( $i \geq n + 1$  in  $\nu(\tilde{\lambda}_i) \leq 2n - i$ )  
 $x_{k+1} = L_+(x_k)$   
**sicer**  
 $x_{k+1} = L_-(x_k)$   
**konec če**  
 $k = k + 1$   
**dokler ni**  $|x_k - x_{k-1}| \leq \epsilon$   
 $\lambda_i = x_k$   
**konec za**

---

Opombe:

- Metoda je rekurzivna, saj v koraku 3 za računanje lastnih vrednosti manjšega problema spet uporabimo isti algoritem.

- Opazimo, da algoritem spominja na metodo deli-in-vladaj za računanje lastnih vrednosti simetrične tridiagonalne matrike [2].
- Za lažjo predstavitev nismo obravnavali večkratnih lastnih vrednosti. To in še ostale podrobnosti lahko najdemo v [6].

## 7 Numerični primer

Za zgled uporabe algoritma iz prejšnjega razdelka vzemimo dušen sistem mas in vzmeti iz razdelka 2. Naj bo  $n = 4$ , mase vseh teles naj bodo 1, konstanti prvih dveh dušilcev naj bosta 2, zadnjih dveh pa 3. Konstanti prve in zadnje vzmeti naj bosta 0.2, ostalih pa 0.1. Tako dobimo

$$M = I, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 & & \\ -0.1 & 0.2 & -0.1 & \\ & -0.1 & 0.2 & -0.1 \\ & & -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Poglejmo, kako deluje zadnji korak v algoritmu, kjer uporabimo Laguerrovo metodo. Začetni približki v zadnjem koraku so unije lastnih vrednosti kvadratnih problemov lastnih vrednosti, ki ju dobimo, če problem razdelimo na dva dela velikosti  $2 \times 2$ . Dobimo

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= -0.04679547, & \tilde{\lambda}_5 &= -1.79887208, \\ \tilde{\lambda}_2 &= -0.07166633, & \tilde{\lambda}_6 &= -1.92625628, \\ \tilde{\lambda}_3 &= -0.12588334, & \tilde{\lambda}_7 &= -2.87411666, \\ \tilde{\lambda}_4 &= -0.20112792, & \tilde{\lambda}_8 &= -2.95320453. \end{aligned}$$

To uporabimo kot začetne približke za Laguerrovo metodo. Če uporabimo kot pogoj za konvergenco  $10^{-15}$ , dobimo naslednje rezultate. Zgornji indeksi v oklepajih pomenijo število korakov, ki jih je potrebovala Laguerrova metoda z začetnim približkom  $\tilde{\lambda}_i$ , da je skonvergirala k lastni vrednosti  $\lambda_i$  z natančnostjo  $10^{-15}$ .

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(3)} &= -0.02329968, & \lambda_5^{(4)} &= -1.79797231, \\ \lambda_2^{(3)} &= -0.08620822, & \lambda_6^{(4)} &= -1.92625301, \\ \lambda_3^{(3)} &= -0.13102707, & \lambda_7^{(4)} &= -2.87448331, \\ \lambda_4^{(3)} &= -0.20672298, & \lambda_8^{(5)} &= -2.95403341. \end{aligned}$$

Preverimo lahko, da res velja prepletanje iz izreka 5. Opazimo lahko tudi, da so  $\tilde{\lambda}_i$  zelo dobri približki za lastne vrednosti  $\lambda_i$ . Pri večjih matrikah je to še bolj izrazito in v končnem koraku algoritma potrebujemo povprečno še manj korakov Laguerrove metode kot v zgornjem zgledu.

## Literatura

- [1] Z. Bohte, *Numerično reševanje nelinearnih enačb*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1993.
- [2] J. W. Demmel, *Uporabna numerična linearna algebra*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 2000.
- [3] R. J. Duffin, *A minimax theory for overdamped networks*, J. Rational Mech. Anal. **4** (1955), 221–233.
- [4] P. Lancaster, *Lambda-matrices and vibrating systems*, Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [5] K. Li in T. Y. Li, *An algorithm for symmetric tridiagonal eigenproblems: Divide and conquer with homotopy continuation*, SIAM J. Sci. Comput. **14** (1993), 735–751.
- [6] T. Y. Li in Z. Zeng, *Laguerre's iteration in solving the symmetric tridiagonal eigenproblem - revisited*, SIAM J. Sci. Comput. **15** (1994), 1145–1173.
- [7] A. S. Markus, *Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils*, Amer. Math. Soc., Providence, 1988.
- [8] D. Sapagovene, *The Sturm sequence for a nonlinear algebraic eigenvalue problem*, Upravljenija I sekcija VYP **16** (1976), 87–95.
- [9] F. Tisseur in K. Meerbergen, *The quadratic eigenvalue problem*, SIAM Review **43** (2001), 235–286.
- [10] J. Wilkinson, *Algebraic eigenvalue problem*, Oxford University Press, Oxford, 1965.