NUMERIČNO REŠEVANJE HIPERBOLIČNEGA KVADRATNEGA PROBLEMA LASTNIH VREDNOSTI

Bor Plestenjak

16. maj 2007

Lastne vrednosti in lastni vektorji

Kvadratni problem lastnih vrednosti (QEP)

Iščemo $\lambda \in \mathbb{C}$ (lastno vrednost) in neničelni $x \in \mathbb{C}^n$ (lastni vektor) da je

$$Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$$

za dane M, C, $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Neničelni $y \in \mathbb{C}^n$, kjer je $y^* Q(\lambda) = 0$, je levi lastni vektor.
- Q je regularen, če karakt. pol. $p(\lambda) := \det Q(\lambda)$ ni identično enak nič.
- Ničle p, ki je stopnje kvečjemu $2n$, so končne lastne vrednosti Q, ki jih po potrebi dopolnimo z $\lambda = \infty$, da jih je skupaj $2n$.
- Neskončne lastne vrednosti Q ustrezajo ničelnim lastnim vrednostim kvadratnega problema lastnih vrednosti $\lambda^2 Q(1/\lambda) = \lambda^2 K + \lambda C + M$.
- Neskončne lastne vrednosti se pojavijo le kadar je M singularna.

Lastne vrednosti in lastni vektorji

Kvadratni problem lastnih vrednosti (QEP)

Iščemo $\lambda \in \mathbb{C}$ (lastno vrednost) in neničelni $x \in \mathbb{C}^n$ (lastni vektor) da je

$$Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$$

za dane M, C, $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Neničelni $y \in \mathbb{C}^n$, kjer je $y^* Q(\lambda) = 0$, je levi lastni vektor.
- Q je regularen, če karakt. pol. $p(\lambda) := \det Q(\lambda)$ ni identično enak nič.
- Ničle p, ki je stopnje kvečjemu $2n$, so končne lastne vrednosti Q, ki jih po potrebi dopolnimo z $\lambda = \infty$, da jih je skupaj $2n$.
- Neskončne lastne vrednosti Q ustrezajo ničelnim lastnim vrednostim kvadratnega problema lastnih vrednosti $\lambda^2 Q(1/\lambda) = \lambda^2 K + \lambda C + M$.
- Neskončne lastne vrednosti se pojavijo le kadar je M singularna.

Kvadratni problem lastnih vrednosti (QEP)

Iščemo $\lambda \in \mathbb{C}$ (lastno vrednost) in neničelni $x \in \mathbb{C}^n$ (lastni vektor) da je

$$Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$$

za dane M, C, $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Neničelni $y \in \mathbb{C}^n$, kjer je $y^* Q(\lambda) = 0$, je levi lastni vektor.
- Q je regularen, če karakt. pol. $p(\lambda) := \det Q(\lambda)$ ni identično enak nič.
- Ničle p, ki je stopnje kvečjemu $2n$, so končne lastne vrednosti Q, ki jih po potrebi dopolnimo z $\lambda = \infty$, da jih je skupaj $2n$.
- Neskončne lastne vrednosti Q ustrezajo ničelnim lastnim vrednostim kvadratnega problema lastnih vrednosti $\lambda^2 Q(1/\lambda) = \lambda^2 K + \lambda C + M$.
- Neskončne lastne vrednosti se pojavijo le kadar je M singularna.

Lastne vrednosti in lastni vektorji

Kvadratni problem lastnih vrednosti (QEP)

Iščemo $\lambda \in \mathbb{C}$ (lastno vrednost) in neničelni $x \in \mathbb{C}^n$ (lastni vektor) da je

$$Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$$

za dane $M, C, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Neničelni $y \in \mathbb{C}^n$, kjer je $y^* Q(\lambda) = 0$, je levi lastni vektor.
- Q je regularen, če karakt. pol. $p(\lambda) := \det Q(\lambda)$ ni identično enak nič.
- Ničle p, ki je stopnje kvečjemu $2n$, so končne lastne vrednosti Q, ki jih po potrebi dopolnimo z $\lambda = \infty$, da jih je skupaj $2n$.
- Neskončne lastne vrednosti Q ustrezajo ničelnim lastnim vrednostim kvadratnega problema lastnih vrednosti $\lambda^2 Q(1/\lambda) = \lambda^2 K + \lambda C + M$.
- Neskončne lastne vrednosti se pojavijo le kadar je M singularna.

Kvadratni problem lastnih vrednosti (QEP)

Iščemo $\lambda \in \mathbb{C}$ (lastno vrednost) in neničelni $x \in \mathbb{C}^n$ (lastni vektor) da je

$$Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$$

za dane M, C, $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Neničelni $y \in \mathbb{C}^n$, kjer je $y^* Q(\lambda) = 0$, je levi lastni vektor.
- Q je regularen, če karakt. pol. $p(\lambda) := \det Q(\lambda)$ ni identično enak nič.
- Ničle p, ki je stopnje kvečjemu $2n$, so končne lastne vrednosti Q, ki jih po potrebi dopolnimo z $\lambda = \infty$, da jih je skupaj $2n$.
- Neskončne lastne vrednosti Q ustrezajo ničelnim lastnim vrednostim kvadratnega problema lastnih vrednosti $\lambda^2 Q(1/\lambda) = \lambda^2 K + \lambda C + M$.
- Neskončne lastne vrednosti se pojavijo le kadar je M singularna.

Kvadratni problem lastnih vrednosti (QEP)

Iščemo $\lambda \in \mathbb{C}$ (lastno vrednost) in neničelni $x \in \mathbb{C}^n$ (lastni vektor) da je

$$Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$$

za dane $M, C, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Neničelni $y \in \mathbb{C}^n$, kjer je $y^* Q(\lambda) = 0$, je levi lastni vektor.
- Q je regularen, če karakt. pol. $p(\lambda) := \det Q(\lambda)$ ni identično enak nič.
- Ničle p, ki je stopnje kvečjemu $2n$, so končne lastne vrednosti Q, ki jih po potrebi dopolnimo z $\lambda = \infty$, da jih je skupaj $2n$.
- Neskončne lastne vrednosti Q ustrezajo ničelnim lastnim vrednostim kvadratnega problema lastnih vrednosti $\lambda^2 Q(1/\lambda) = \lambda^2 K + \lambda C + M$.
- Neskončne lastne vrednosti se pojavijo le kadar je M singularna.

Zgled

Če vzamemo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

je $\det Q(\lambda) = -6\lambda^5 + 11\lambda^4 - 12\lambda^3 + 12\lambda^2 - 6\lambda + 1$ in problem je regularen.

Lastni pari so

$$\begin{array}{c|cccccc} k & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \lambda_k & 1/3 & 1/2 & 1 & i & -i & \infty \\ x_k & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

- Pet lastnih vrednosti je končnih, ena pa neskončna.
- Lastni vektorji očitno ne morejo biti linearno neodvisni.
- Različnima lastnima vrednostima lahko pripada isti lastni vektor.

Zgled

Če vzamemo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

je $\det Q(\lambda) = -6\lambda^5 + 11\lambda^4 - 12\lambda^3 + 12\lambda^2 - 6\lambda + 1$ in problem je regularen.

Lastni pari so

$$\begin{array}{c|cccccc} k & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \lambda_k & 1/3 & 1/2 & 1 & i & -i & \infty \\ x_k & \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \end{array}.$$

- Pet lastnih vrednosti je končnih, ena pa neskončna.
- Lastni vektorji očitno ne morejo biti linearno neodvisni.
- Različnima lastnima vrednostima lahko pripada isti lastni vektor.

Zgled

Če vzamemo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

je $\det Q(\lambda) = -6\lambda^5 + 11\lambda^4 - 12\lambda^3 + 12\lambda^2 - 6\lambda + 1$ in problem je regularen.

Lastni pari so

$$\begin{array}{c|cccccc} k & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \lambda_k & 1/3 & 1/2 & 1 & i & -i & \infty \\ x_k & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

- Pet lastnih vrednosti je končnih, ena pa neskončna.
- Lastni vektorji očitno ne morejo biti linearno neodvisni.
- Različnima lastnima vrednostima lahko pripada isti lastni vektor.

Zgled

Če vzamemo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

je $\det Q(\lambda) = -6\lambda^5 + 11\lambda^4 - 12\lambda^3 + 12\lambda^2 - 6\lambda + 1$ in problem je regularen.

Lastni pari so

$$\begin{array}{c|cccccc} k & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \lambda_k & 1/3 & 1/2 & 1 & i & -i & \infty \\ x_k & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

- Pet lastnih vrednosti je končnih, ena pa neskončna.
- Lastni vektorji očitno ne morejo biti linearno neodvisni.
- Različnima lastnima vrednostima lahko pripada isti lastni vektor.

Zgled

Če vzamemo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

je $\det Q(\lambda) = -6\lambda^5 + 11\lambda^4 - 12\lambda^3 + 12\lambda^2 - 6\lambda + 1$ in problem je regularen.

Lastni pari so

$$\begin{array}{c|cccccc} k & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \lambda_k & 1/3 & 1/2 & 1 & i & -i & \infty \\ x_k & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

- Pet lastnih vrednosti je končnih, ena pa neskončna.
- Lastni vektorji očitno ne morejo biti linearno neodvisni.
- Različnima lastnima vrednostima lahko pripada isti lastni vektor.

QEP $Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$ lahko prevedemo na posplošeni problem lastnih vrednosti velikosti $2n$. Pogost primer je

$$\begin{bmatrix} 0 & N \\ -K & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

kjer je N poljubna nesingularna matrika.

Če je $\det M \neq 0$ in vzamemo $N = I$, (1) prevedemo na stand. lastni problem

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Če pri simetričnem QEP, kjer so matrike M, C in K simetrične, izberemo $N = -K$, potem sta v (1) matriki simetrični, pri (2) pa simetrije ni več.

Tudi če standardni oz. posplošeni problem lastnih vrednosti rešimo z obratno stabilnim algoritmom, to še ne zagotavlja stabilnega reševanja QEP.

Linearizacija

QEP $Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$ lahko prevedemo na posplošeni problem lastnih vrednosti velikosti $2n$. Pogost primer je

$$\begin{bmatrix} 0 & N \\ -K & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

kjer je N poljubna nesingularna matrika.

Če je $\det M \neq 0$ in vzamemo $N = I$, (1) prevedemo na stand. lastni problem

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Če pri simetričnem QEP, kjer so matrike M, C in K simetrične, izberemo $N = -K$, potem sta v (1) matriki simetrični, pri (2) pa simetrije ni več.

Tudi če standardni oz. posplošeni problem lastnih vrednosti rešimo z obratno stabilnim algoritmom, to še ne zagotavlja stabilnega reševanja QEP.

Linearizacija

QEP $Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$ lahko prevedemo na posplošeni problem lastnih vrednosti velikosti $2n$. Pogost primer je

$$\begin{bmatrix} 0 & N \\ -K & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

kjer je N poljubna nesingularna matrika.

Če je $\det M \neq 0$ in vzamemo $N = I$, (1) prevedemo na stand. lastni problem

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Če pri simetričnem QEP, kjer so matrike M, C in K simetrične, izberemo $N = -K$, potem sta v (1) matriki simetrični, pri (2) pa simetrije ni več.

Tudi če standardni oz. posplošeni problem lastnih vrednosti rešimo z obratno stabilnim algoritmom, to še ne zagotavlja stabilnega reševanja QEP.

QEP je hiperboličen, če so matrike M, C in K simetrične, M je pozitivno definitna in za vsak neničelni vektor x velja

$$(x^T Cx)^2 > 4(x^T Mx)(x^T Kx).$$

Hiperbolični QEP ima $2n$ realnih lastnih parov, vse lastne vrednosti so polenostavne. Med n največjimi (primarnimi) in n najmanjšimi (sekundarnimi) lastnimi vrednostmi je strog razmik. Primarnim (sekundarnim) lastnim vr. pripada n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.

Posplošitev Rayleighovega kvocienta

Za $x \neq 0$ ima kvadratna enačba $x^T Q(\lambda)x = 0$ dve enostavni realni rešitvi

$$\rho_\pm(x) = \frac{-c(x) \pm \sqrt{c(x)^2 - 4m(x)k(x)}}{2m(x)}, \tag{3}$$

kjer je $m(x) = x^T Mx$, $c(x) = x^T Cx$ in $k(x) = x^T Kx$. Če je x lastni vektor, je vsaj ena rešitev (3) lastna vrednost.

Hiperbolični QEP

QEP je hiperboličen, če so matrike M, C in K simetrične, M je pozitivno definitna in za vsak neničelni vektor x velja

$$(x^T Cx)^2 > 4(x^T Mx)(x^T Kx).$$

Hiperbolični QEP ima $2n$ realnih lastnih parov, vse lastne vrednosti so polenostavne. Med n največjimi (primarnimi) in n najmanjšimi (sekundarnimi) lastnimi vrednostmi je strog razmik. Primarnim (sekundarnim) lastnim vr. pripada n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.

Posplošitev Rayleighovega kvocienta

Za $x \neq 0$ ima kvadratna enačba $x^T Q(\lambda)x = 0$ dve enostavni realni rešitvi

$$\rho_{\pm}(x) = \frac{-c(x) \pm \sqrt{c(x)^2 - 4m(x)k(x)}}{2m(x)}, \tag{3}$$

kjer je $m(x) = x^T Mx$, $c(x) = x^T Cx$ in $k(x) = x^T Kx$. Če je x lastni vektor, je vsaj ena rešitev (3) lastna vrednost.

Hiperbolični QEP

QEP je hiperboličen, če so matrike M, C in K simetrične, M je pozitivno definitna in za vsak neničelni vektor x velja

$$(x^T C x)^2 > 4(x^T M x)(x^T K x).$$

Hiperbolični QEP ima $2n$ realnih lastnih parov, vse lastne vrednosti so polenostavne. Med n največjimi (primarnimi) in n najmanjšimi (sekundarnimi) lastnimi vrednostmi je strog razmik. Primarnim (sekundarnim) lastnim vr. pripada n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.

Posplošitev Rayleighovega kvocienta

Za $x \neq 0$ ima kvadratna enačba $x^T Q(\lambda) x = 0$ dve enostavni realni rešitvi

$$\rho_{\pm}(x) = \frac{-c(x) \pm \sqrt{c(x)^2 - 4m(x)k(x)}}{2m(x)}, \tag{3}$$

kjer je $m(x) = x^T M x$, $c(x) = x^T C x$ in $k(x) = x^T K x$. Če je x lastni vektor, je vsaj ena rešitev (3) lastna vrednost.

Minimax izrek

Ker so lastne vrednosti realne, jih lahko uredimo po velikosti, da velja

$$\lambda_{2n} \leq \cdots \leq \lambda_{n+1} < \lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_1.$$

Primarne lastne vrednosti so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, sekundarne pa $\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{2n}$.

Izrek (Duffin)

Za $i = 1, \ldots, n$ velja

$$\lambda_i = \max_{\substack{S \subset \mathbb{R}^n \\ \dim(S)=i}} \min_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \rho_+(x) = \min_{\substack{R \subset \mathbb{R}^n \\ \dim(R)=n-i+1}} \max_{\substack{x \in R \\ x \neq 0}} \rho_+(x),$$

$$\lambda_{n+i} = \max_{\substack{S \subset \mathbb{R}^n \\ \dim(S)=i}} \min_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \rho_-(x) = \min_{\substack{R \subset \mathbb{R}^n \\ \dim(R)=n-i+1}} \max_{\substack{x \in R \\ x \neq 0}} \rho_-(x).$$

Izrek (Markus)

Simetrični kvadratni problem lastnih vrednosti Q je hiperboličen natanko tedaj, ko obstaja tako realno število γ, da je $Q(\gamma)$ negativno definitna matrika.

Za γ iz Markusovega izreka velja $\lambda_{n+1} < \gamma < \lambda_n$.

Inercija

Za simetrično matriko A lahko za izračun lastnih vrednosti uporabimo bisekcijo.

Podoben postopek lahko razvijemo za tridiagonalni hiperbolični QEP, kjer po Markusovem izreku obstaja tak γ, da je $Q(\gamma)$ negativno definitna matrika.

Izrek

Naj bo Q hiperbolični QEP in naj bo $\det Q(\lambda_0) \neq 0$.

1. *Če je $\lambda_0 \leq \gamma$, potem je število negativnih lastnih vrednosti matrike $Q(\lambda_0)$ enako številu lastnih vrednosti Q, ki so manjše od λ_0.*
2. *Če je $\lambda_0 \geq \gamma$, potem je število negativnih lastnih vrednosti matrike $Q(\lambda_0)$ enako številu lastnih vrednosti Q, ki so večje od λ_0.*

Inercija

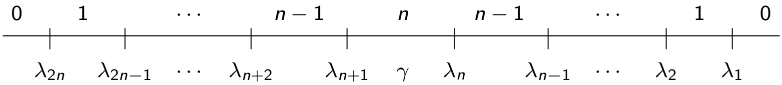
Za simetrično matriko A lahko za izračun lastnih vrednosti uporabimo bisekcijo.

Podoben postopek lahko razvijemo za tridiagonalni hiperbolični QEP, kjer po Markusovem izreku obstaja tak γ, da je $Q(\gamma)$ negativno definitna matrika.

Izrek

Naj bo Q hiperbolični QEP in naj bo $\det Q(\lambda_0) \neq 0$.

1. *Če je $\lambda_0 \leq \gamma$, potem je število negativnih lastnih vrednosti matrike $Q(\lambda_0)$ enako številu lastnih vrednosti Q, ki so manjše od λ_0.*
2. *Če je $\lambda_0 \geq \gamma$, potem je število negativnih lastnih vrednosti matrike $Q(\lambda_0)$ enako številu lastnih vrednosti Q, ki so večje od λ_0.*



Iskanje lastnih vrednosti hiperboličnega QEP z bisekcijo

Iz danih simetričnih tridiagonalnih matrik M, C in K in začetnega intervala $[a, b]$ izračuna lastno vrednost λ_k tridiagonalnega hiperboličnega QEP.

dokler $|b - a| > \epsilon$
  $c = (a + b)/2$
  če $\nu(c) \geq k$
    $a = c$
  sicer
    $b = c$

Algoritem lahko uporabimo tudi za sekundarne lastne vrednosti.

Če matrike M, C in K niso tridiagonalne, se časovna zahtevnost poveča.

Bisekcija je sicer zelo robustna metoda, a konvergira počasi.

Iskanje lastnih vrednosti hiperboličnega QEP z bisekcijo

Iz danih simetričnih tridiagonalnih matrik M, C in K in začetnega intervala $[a, b]$ izračuna lastno vrednost λ_k tridiagonalnega hiperboličnega QEP.

dokler $|b - a| > \epsilon$
  $c = (a + b)/2$
  če $\nu(c) \geq k$
    $a = c$
  sicer
    $b = c$

Algoritem lahko uporabimo tudi za sekundarne lastne vrednosti.

Če matrike M, C in K niso tridiagonalne, se časovna zahtevnost poveča.

Bisekcija je sicer zelo robustna metoda, a konvergira počasi.

Laguerrova metoda

Laguerrova iteracija za $p(\lambda) = \det Q(\lambda)$ je

$$L_{\pm}(x) = x + \frac{2n}{\left(\frac{-p'(x)}{p(x)} \pm \sqrt{(2n-1)\left((2n-1)\left(\frac{-p'(x)}{p(x)}\right)^2 - 2n\frac{p''(x)}{p(x)}\right)}\right)}.$$

Iz začetnega približka x dobimo dva približka $L_-(x)$ in $L_+(x)$.

Če ima polinom same realne ničle, vemo:

- Če si predstavljamo, da sta v neskončnosti pozitivni in negativni krak realne osi povezana, potem $L_-(x)$ leži med x in najbližjo manjšo ničlo, $L_+(x)$ pa med x in najbližjo večjo ničlo.
- Iz $x \in (\lambda_{i+1}, \lambda_i)$ sledi $\lambda_{i+1} < L_-(x) < x < L_+(x) < \lambda_i$.
- Konvergenca pri enostavni ničli je kubična, v bližini večkratne pa linearna.
- Približki $x_{r+1} = L_+(x_r)$ monotono konvergirajo proti najmanjši ničli polinoma, ki je večja ali enaka x_0. Podobno $x_{r+1} = L_-(x_r)$ monotono konvergira proti največji ničli manjši ali enaki x_0.

Laguerrova iteracija za $p(\lambda) = \det Q(\lambda)$ je

$$L_{\pm}(x) = x + \frac{2n}{\left(\frac{-p'(x)}{p(x)} \pm \sqrt{(2n-1)\left((2n-1)\left(\frac{-p'(x)}{p(x)}\right)^2 - 2n\frac{p''(x)}{p(x)}\right)}\right)}.$$

Iz začetnega približka x dobimo dva približka $L_-(x)$ in $L_+(x)$.

Če ima polinom same realne ničle, vemo:

- Če si predstavljamo, da sta v neskončnosti pozitivni in negativni krak realne osi povezana, potem $L_-(x)$ leži med x in najbližjo manjšo ničlo, $L_+(x)$ pa med x in najbližjo večjo ničlo.
- Iz $x \in (\lambda_{i+1}, \lambda_i)$ sledi $\lambda_{i+1} < L_-(x) < x < L_+(x) < \lambda_i$.
- Konvergenca pri enostavni ničli je kubična, v bližini večkratne pa linearna.
- Približki $x_{r+1} = L_+(x_r)$ monotono konvergirajo proti najmanjši ničli polinoma, ki je večja ali enaka x_0. Podobno $x_{r+1} = L_-(x_r)$ monotono konvergira proti največji ničli manjši ali enaki x_0.

Laguerrova metoda

Laguerrova iteracija za $p(\lambda) = \det Q(\lambda)$ je

$$L_{\pm}(x) = x + \frac{2n}{\left(\frac{-p'(x)}{p(x)} \pm \sqrt{(2n-1)\left((2n-1)\left(\frac{-p'(x)}{p(x)}\right)^2 - 2n\frac{p''(x)}{p(x)} \right)} \right)}.$$

Iz začetnega približka x dobimo dva približka $L_{-}(x)$ in $L_{+}(x)$.

Če ima polinom same realne ničle, vemo:

- Če si predstavljamo, da sta v neskončnosti pozitivni in negativni krak realne osi povezana, potem $L_{-}(x)$ leži med x in najbližjo manjšo ničlo, $L_{+}(x)$ pa med x in najbližjo večjo ničlo.
- Iz $x \in (\lambda_{i+1}, \lambda_i)$ sledi $\lambda_{i+1} < L_{-}(x) < x < L_{+}(x) < \lambda_i$.
- Konvergenca pri enostavni ničli je kubična, v bližini večkratne pa linearna.
- Približki $x_{r+1} = L_{+}(x_r)$ monotono konvergirajo proti najmanjši ničli polinoma, ki je večja ali enaka x_0. Podobno $x_{r+1} = L_{-}(x_r)$ monotono konvergira proti največji ničli manjši ali enaki x_0.

Laguerrova metoda

Laguerrova iteracija za $p(\lambda) = \det Q(\lambda)$ je

$$L_{\pm}(x) = x + \frac{2n}{\left(\frac{-p'(x)}{p(x)} \pm \sqrt{(2n-1)\left((2n-1)\left(\frac{-p'(x)}{p(x)}\right)^2 - 2n\frac{p''(x)}{p(x)}\right)}\right)}.$$

Iz začetnega približka x dobimo dva približka $L_-(x)$ in $L_+(x)$.

Če ima polinom same realne ničle, vemo:

- Če si predstavljamo, da sta v neskončnosti pozitivni in negativni krak realne osi povezana, potem $L_-(x)$ leži med x in najbližjo manjšo ničlo, $L_+(x)$ pa med x in najbližjo večjo ničlo.
- Iz $x \in (\lambda_{i+1}, \lambda_i)$ sledi $\lambda_{i+1} < L_-(x) < x < L_+(x) < \lambda_i$.
- Konvergenca pri enostavni ničli je kubična, v bližini večkratne pa linearna.
- Približki $x_{r+1} = L_+(x_r)$ monotono konvergirajo proti najmanjši ničli polinoma, ki je večja ali enaka x_0. Podobno $x_{r+1} = L_-(x_r)$ monotono konvergira proti največji ničli manjši ali enaki x_0.

Laguerrova metoda

Laguerrova iteracija za $p(\lambda) = \det Q(\lambda)$ je

$$L_\pm(x) = x + \frac{2n}{\left(\frac{-p'(x)}{p(x)} \pm \sqrt{(2n-1)\left((2n-1)\left(\frac{-p'(x)}{p(x)}\right)^2 - 2n\frac{p''(x)}{p(x)}\right)}\right)}.$$

Iz začetnega približka x dobimo dva približka $L_-(x)$ in $L_+(x)$.

Če ima polinom same realne ničle, vemo:

- Če si predstavljamo, da sta v neskončnosti pozitivni in negativni krak realne osi povezana, potem $L_-(x)$ leži med x in najbližjo manjšo ničlo, $L_+(x)$ pa med x in najbližjo večjo ničlo.
- Iz $x \in (\lambda_{i+1}, \lambda_i)$ sledi $\lambda_{i+1} < L_-(x) < x < L_+(x) < \lambda_i$.
- Konvergenca pri enostavni ničli je kubična, v bližini večkratne pa linearna.
- Približki $x_{r+1} = L_+(x_r)$ monotono konvergirajo proti najmanjši ničli polinoma, ki je večja ali enaka x_0. Podobno $x_{r+1} = L_-(x_r)$ monotono konvergira proti največji ničli manjši ali enaki x_0.

Izračun vrednosti $p(\lambda)$, $p'(\lambda)$ in $p''(\lambda)$

Za Laguerrovo metodo potrebujemo ekonomičen in stabilen izračun vrednosti $p(\lambda)$, $p'(\lambda)$ in $p''(\lambda)$, kjer je $p(\lambda) = \det Q(\lambda)$. Naj bo

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

kjer je $a_i = a_i(\lambda)$ in $b_i = b_i(\lambda)$ in naj bo $p_k(\lambda)$ determinanta vodilne $k \times k$ podmatrike $Q(\lambda)$ za $k = 1, \ldots, n$. Velja:

$p_0 = 1,\ p_1 = a_1,$
$p_{r+1} = a_{r+1} p_r - b_r^2 p_{r-1}.$

$p_0' = 0,\ p_1' = a_1',$
$p_{r+1}' = a_{r+1}' p_r + a_{r+1} p_r' - 2 b_r b_r' p_{r-1} - b_r^2 p_{r-1}'.$

$p_0'' = 0, p_1'' = a_1'',$
$p_{r+1}'' = a_{r+1}'' p_r + 2 a_{r+1}' p_r' + a_{r+1} p_r'' - 2 (b_r')^2 p_{r-1} - 2 b_r b_r'' p_{r-1} - 4 b_r b_r' p_{r-1}' - b_r^2 p_{r-1}''.$

Izračun vrednosti $p(\lambda)$, $p'(\lambda)$ in $p''(\lambda)$

Za Laguerrovo metodo potrebujemo ekonomičen in stabilen izračun vrednosti $p(\lambda)$, $p'(\lambda)$ in $p''(\lambda)$, kjer je $p(\lambda) = \det Q(\lambda)$. Naj bo

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

kjer je $a_i = a_i(\lambda)$ in $b_i = b_i(\lambda)$ in naj bo $p_k(\lambda)$ determinanta vodilne $k \times k$ podmatrike $Q(\lambda)$ za $k = 1, \ldots, n$. Velja:

$p_0 = 1,\ p_1 = a_1,$
$p_{r+1} = a_{r+1} p_r - b_r^2 p_{r-1}.$

$p_0' = 0,\ p_1' = a_1',$
$p_{r+1}' = a_{r+1}' p_r + a_{r+1} p_r' - 2 b_r b_r' p_{r-1} - b_r^2 p_{r-1}'.$

$p_0'' = 0, p_1'' = a_1'',$
$p_{r+1}'' = a_{r+1}'' p_r + 2a_{r+1}' p_r' + a_{r+1} p_r'' - 2(b_r')^2 p_{r-1} - 2 b_r b_r'' p_{r-1} - 4 b_r b_r' p_{r-1}' - b_r^2 p_{r-1}''.$

Izračun vrednosti $p(\lambda)$, $p'(\lambda)$ in $p''(\lambda)$

Za Laguerrovo metodo potrebujemo ekonomičen in stabilen izračun vrednosti $p(\lambda)$, $p'(\lambda)$ in $p''(\lambda)$, kjer je $p(\lambda) = \det Q(\lambda)$. Naj bo

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

kjer je $a_i = a_i(\lambda)$ in $b_i = b_i(\lambda)$ in naj bo $p_k(\lambda)$ determinanta vodilne $k \times k$ podmatrike $Q(\lambda)$ za $k = 1, \ldots, n$. Velja:

$$p_0 = 1,\ p_1 = a_1,$$
$$p_{r+1} = a_{r+1}p_r - b_r^2 p_{r-1}.$$

$$p_0' = 0,\ p_1' = a_1',$$
$$p_{r+1}' = a_{r+1}'p_r + a_{r+1}p_r' - 2b_r b_r' p_{r-1} - b_r^2 p_{r-1}'.$$

$$p_0'' = 0, p_1'' = a_1'',$$
$$p_{r+1}'' = a_{r+1}''p_r + 2a_{r+1}'p_r' + a_{r+1}p_r'' - 2(b_r')^2 p_{r-1} - 2b_r b_r'' p_{r-1} - 4b_r b_r' p_{r-1}' - b_r^2 p_{r-1}''.$$

- Izberemo $m \approx n/2$ in postavimo b_m na 0. Dobimo

$$Q_0(\lambda) = \begin{bmatrix} Q_1(\lambda) & 0 \\ 0 & Q_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

- Matriki $Q_0(\lambda)$ in $Q(\lambda)$ se malo razlikujeta, zato pričakujemo, da se tudi lastne vrednosti Q_0 in Q malo razlikujejo.
- Lastne vrednosti Q_0 dobimo tako, da rekurzivno rešimo manjša hiperbolična QEP Q_1 in Q_2, potem pa združene lastne vrednosti uporabimo kot začetne približke za originalni problem Q.
- Za dokončen izračun lastnih vrednosti uporabimo Laguerrovo metodo.

Deli in vladaj

- Izberemo $m \approx n/2$ in postavimo b_m na 0. Dobimo

$$Q_0(\lambda) = \begin{bmatrix} Q_1(\lambda) & 0 \\ 0 & Q_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

- Matriki $Q_0(\lambda)$ in $Q(\lambda)$ se malo razlikujeta, zato pričakujemo, da se tudi lastne vrednosti Q_0 in Q malo razlikujejo.

- Lastne vrednosti Q_0 dobimo tako, da rekurzivno rešimo manjša hiperbolična QEP Q_1 in Q_2, potem pa združene lastne vrednosti uporabimo kot začetne približke za originalni problem Q.

- Za dokončen izračun lastnih vrednosti uporabimo Laguerrovo metodo.

- Izberemo $m \approx n/2$ in postavimo b_m na 0. Dobimo

$$Q_0(\lambda) = \begin{bmatrix} Q_1(\lambda) & 0 \\ 0 & Q_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

- Matriki $Q_0(\lambda)$ in $Q(\lambda)$ se malo razlikujeta, zato pričakujemo, da se tudi lastne vrednosti Q_0 in Q malo razlikujejo.
- Lastne vrednosti Q_0 dobimo tako, da rekurzivno rešimo manjša hiperbolična QEP Q_1 in Q_2, potem pa združene lastne vrednosti uporabimo kot začetne približke za originalni problem Q.
- Za dokončen izračun lastnih vrednosti uporabimo Laguerrovo metodo.

Deli in vladaj

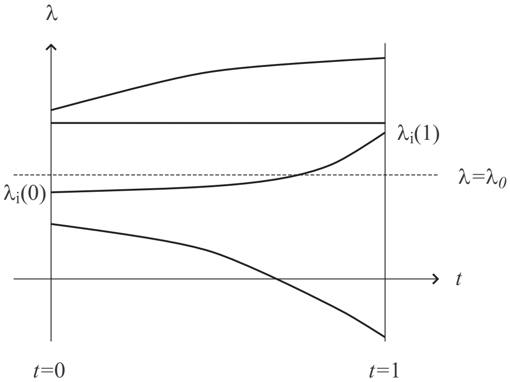
- Izberemo $m \approx n/2$ in postavimo b_m na 0. Dobimo
$$Q_0(\lambda) = \begin{bmatrix} Q_1(\lambda) & 0 \\ 0 & Q_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$
- Matriki $Q_0(\lambda)$ in $Q(\lambda)$ se malo razlikujeta, zato pričakujemo, da se tudi lastne vrednosti Q_0 in Q malo razlikujejo.
- Lastne vrednosti Q_0 dobimo tako, da rekurzivno rešimo manjša hiperbolična QEP Q_1 in Q_2, potem pa združene lastne vrednosti uporabimo kot začetne približke za originalni problem Q.
- Za dokončen izračun lastnih vrednosti uporabimo Laguerrovo metodo.

Monotone lastne krivulje

Definirajmo QEP $Q(t)$ z matriko $Q(t,\lambda) = tQ(\lambda) + (1-t)Q_0(\lambda)$.

Izrek

Označimo lastne vrednosti QEP $Q(t)$ z $\lambda_{2n}(t) \le \cdots \le \lambda_1(t)$. Vsaka lastna krivulja $\lambda_i(t)$ je na intervalu $[0,1]$ ali strogo monotona ali pa enaka konstanti.



Prepletanje lastnih vrednosti

Izrek

Če so $\widetilde{\lambda}_{2n} \leq \cdots \leq \widetilde{\lambda}_1$ lastne vrednosti Q_0 in $\lambda_{2n} \leq \cdots \leq \lambda_1$ lastne vrednosti Q, velja:

a) $\lambda_{2n} \leq \widetilde{\lambda}_{2n}$ *in* $\widetilde{\lambda}_1 \leq \lambda_1$,

b) $\lambda_{i+1} \leq \widetilde{\lambda}_i \leq \lambda_{i-1}$ *za* $i = 2, \ldots, n-1$ *in* $i = n+2, \ldots, 2n-1$,

c) $\widetilde{\lambda}_{n+1} \leq \lambda_{n+1} < \lambda_n \leq \widetilde{\lambda}_n$.

1. Ker velja $\lambda_{i+1} \leq \widetilde{\lambda}_i \leq \lambda_{i-1}$ lahko vzamemo $\widetilde{\lambda}_i$ kot začetni približek za λ_i.
2. Iz vrednosti $\nu(Q(\widetilde{\lambda}_i))$ razberemo ali je $\lambda_i \geq \widetilde{\lambda}_i$ ali $\widetilde{\lambda}_i \geq \lambda_i$ in se potem odločimo za uporabo zaporedja L_+ ali L_-.
3. Laguerrova metoda potem monotono skonvergira proti lastni vrednosti λ_i.

Prepletanje lastnih vrednosti

Izrek

Če so $\widetilde{\lambda}_{2n} \le \cdots \le \widetilde{\lambda}_1$ *lastne vrednosti* Q_0 *in* $\lambda_{2n} \le \cdots \le \lambda_1$ *lastne vrednosti* Q*, velja:*

a) $\lambda_{2n} \le \widetilde{\lambda}_{2n}$ *in* $\widetilde{\lambda}_1 \le \lambda_1$*,*

b) $\lambda_{i+1} \le \widetilde{\lambda}_i \le \lambda_{i-1}$ *za* $i = 2, \ldots, n-1$ *in* $i = n+2, \ldots, 2n-1$*,*

c) $\widetilde{\lambda}_{n+1} \le \lambda_{n+1} < \lambda_n \le \widetilde{\lambda}_n$*.*

1. Ker velja $\lambda_{i+1} \le \widetilde{\lambda}_i \le \lambda_{i-1}$ lahko vzamemo $\widetilde{\lambda}_i$ kot začetni približek za λ_i.
2. Iz vrednosti $\nu(Q(\widetilde{\lambda}_i))$ razberemo ali je $\lambda_i \ge \widetilde{\lambda}_i$ ali $\widetilde{\lambda}_i \ge \lambda_i$ in se potem odločimo za uporabo zaporedja L_+ ali L_-.
3. Laguerrova metoda potem monotono skonvergira proti lastni vrednosti λ_i.

Prepletanje lastnih vrednosti

Izrek

Če so $\widetilde{\lambda}_{2n} \leq \cdots \leq \widetilde{\lambda}_1$ lastne vrednosti Q_0 in $\lambda_{2n} \leq \cdots \leq \lambda_1$ lastne vrednosti Q, velja:

a) $\lambda_{2n} \leq \widetilde{\lambda}_{2n}$ *in* $\widetilde{\lambda}_1 \leq \lambda_1$,

b) $\lambda_{i+1} \leq \widetilde{\lambda}_i \leq \lambda_{i-1}$ *za* $i = 2, \ldots, n-1$ *in* $i = n+2, \ldots, 2n-1$,

c) $\widetilde{\lambda}_{n+1} \leq \lambda_{n+1} < \lambda_n \leq \widetilde{\lambda}_n$.

1. Ker velja $\lambda_{i+1} \leq \widetilde{\lambda}_i \leq \lambda_{i-1}$ lahko vzamemo $\widetilde{\lambda}_i$ kot začetni približek za λ_i.
2. Iz vrednosti $\nu(Q(\widetilde{\lambda}_i))$ razberemo ali je $\lambda_i \geq \widetilde{\lambda}_i$ ali $\widetilde{\lambda}_i \geq \lambda_i$ in se potem odločimo za uporabo zaporedja L_+ ali L_-.
3. Laguerrova metoda potem monotono skonvergira proti lastni vrednosti λ_i.

Prepletanje lastnih vrednosti

Izrek

Če so $\widetilde{\lambda}_{2n} \le \cdots \le \widetilde{\lambda}_1$ *lastne vrednosti* Q_0 *in* $\lambda_{2n} \le \cdots \le \lambda_1$ *lastne vrednosti* Q*, velja:*

a) $\lambda_{2n} \le \widetilde{\lambda}_{2n}$ *in* $\widetilde{\lambda}_1 \le \lambda_1$,

b) $\lambda_{i+1} \le \widetilde{\lambda}_i \le \lambda_{i-1}$ *za* $i = 2, \ldots, n-1$ *in* $i = n+2, \ldots, 2n-1$,

c) $\widetilde{\lambda}_{n+1} \le \lambda_{n+1} < \lambda_n \le \widetilde{\lambda}_n$.

1. Ker velja $\lambda_{i+1} \le \widetilde{\lambda}_i \le \lambda_{i-1}$ lahko vzamemo $\widetilde{\lambda}_i$ kot začetni približek za λ_i.
2. Iz vrednosti $\nu(Q(\widetilde{\lambda}_i))$ razberemo ali je $\lambda_i \ge \widetilde{\lambda}_i$ ali $\widetilde{\lambda}_i \ge \lambda_i$ in se potem odločimo za uporabo zaporedja L_+ ali L_-.
3. Laguerrova metoda potem monotono skonvergira proti lastni vrednosti λ_i.

Algoritem

Iz danih simetričnih tridiagonalnih matrik M, C in K reda n izračuna lastne vrednosti $\lambda_{2n} \leq \cdots \leq \lambda_1$ tridiagonalnega hiperboličnega QEP Q.

Korak 1. Če je $n = 1$, reši $\lambda^2 M + \lambda C + K = 0$ in končaj.

Korak 2. Razdeli matrike na M_1, C_1, K_1 in M_2, C_2, K_2.

Korak 3. Rekurzivno reši QEP $\lambda^2 M_i + \lambda C_i + K_i$ za $i = 1, 2$.

Korak 4. Združi rešitve iz koraka 3 in jih uredi v $\widetilde{\lambda}_{2n} \leq \cdots \leq \widetilde{\lambda}_1$.

Korak 5. $i = 1, \ldots, 2n$
    $x_0 = \widetilde{\lambda}_i$
    za $k = 0, 1, \ldots$ **ponavljaj**
        če $(i \leq n$ in $\nu(\widetilde{\lambda}_i) \geq i)$ ali $(i \geq n+1$ in $\nu(\widetilde{\lambda}_i) \leq 2n - i)$
            $x_{k+1} = L_+(x_k)$
        sicer
            $x_{k+1} = L_-(x_k)$
    dokler ni $|x_k - x_{k-1}| \leq \epsilon$
    $\lambda_i = x_k$